

RootLattice

Noboru Nawashiro

2025 年 6 月 30 日

1 reflection groups と root lattices

ここで登場する記号は Mathlib とは関係ない独立したものであり、証明も Mathlib のものとは異なる場合がある。

以下、 V を $\mathbb{R}^n$ の subspace とし、 $\alpha, \beta \in V$ の内積を $\langle \alpha, \beta \rangle$ と書き、 α のノルムを $\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ と書く。

定義 1.1. $f : V \rightarrow V$ を線型写像とする。このとき、 f が**直交変換**であるとは、

$$\langle f(\alpha), f(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

が成り立つことである。また、 V 上の直交変換全体の集合を $O(V)$ と書く。

注意 1.2. 定義から $\|f(\alpha)\| = \|\alpha\|$ がすぐわかる。

注意 1.3. $f \in O(\mathbb{R}^n)$ とする。 $O(n) := \{A \mid {}^tAA = I_n\}$ (i.e., 直交行列全体) とすると、 $A \in O(n)$ を用いて $f(x) = Ax$ と表せる。よって、次の 1 対 1 対応がある：

$$\begin{array}{ccc} O(n) & \xleftrightarrow[\text{one-to-one}]{\simeq} & O(\mathbb{R}^n) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A & \longleftrightarrow & f(x) = Ax \end{array}$$

以下、 $\mathbf{k}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし (Lean では `RCLike`)、 E を $\mathbf{k}$ -内積空間、 K を E の $\mathbf{k}$ -部分加群とする。

定義 1.4. $\forall v \in E, \exists w \in K$ s.t. $v - w \in K^\perp$ とする。線型連続写像 $\text{proj}_K : E \rightarrow K; \text{proj}_K(v) = w$ を**正射影 (projection)** という。すなわち、 $x \in E$ を $x = \text{proj}_K(x) + (x - \text{proj}_K(x)) \in K \oplus K^\perp$ と書ける。

定理 1.5. 任意の $v, w \in E$ に対して次が成り立つ：

$$\text{proj}_{\mathbf{k}v}(w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} v.$$

証明. 略。 ■

定義 1.6. 次の直交変換を **reflection** という：

$$s_K : E \rightarrow E; x \mapsto 2 \cdot \text{proj}_K(x) - x.$$

定理 1.7. 任意の $u, v \in E$ に対し、次が成り立つ：

$$s_{\mathbf{k}u}(v) = 2 \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u - v.$$

証明. 略. ■

注意 1.8. 以前, α に関する reflection は

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - 2 \frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha.$$

と表せることを見た. 定理 1.7 からわかるように, $s_{k\alpha}$ は s_α と逆向き (すなわち, $s_\alpha = s_{H_\alpha} = s_{(\mathbb{R}\alpha)^\perp}$) である.

定理 1.9. 任意の $x \in E$ に対して次が成り立つ:

$$s_K(x) = x \iff x \in K.$$

証明. 略. ■

定理 1.10. E' を k -内積空間, $f: E \rightarrow E'$ を線形同型な等長写像 (すなわち, $\|f(x)\| = \|x\|$) とする. このとき, 任意の $x \in E'$ に対して次が成り立つ:

$$s_{f(K)}(x) = f(s_K(f^{-1}(x))).$$

証明. 略. ■

定理 1.11. 任意の $v \in E$ に対し, $v \in K^\perp$ なら $s_K(v) = -v$ である.

証明. 略. ■

定義 1.12. $O(V)$ の部分群 W が次を満たすとき, W を **finite reflection group** という:

- (i) W は finite group,
- (ii) W は reflections で生成される, すなわち

$$\forall w \in W, \exists s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_r} \in W: \text{reflections s.t. } w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}.$$

注意 1.13. $s_\alpha^2 = 1$.

定義 1.14. finite reflection group W が次を満たすとき, W は **essential** であるという:

$$\text{Fix}(W) := \{\lambda \in V \mid \forall w \in W, w(\lambda) = \lambda\} = \{0\}.$$

注意 1.15. W が essential でないとき, $V = \text{Fix}(W) \oplus \text{Fix}(W)^\perp$ である. また, 部分空間 $\text{Fix}(W)^\perp$ 上では W は essential である.

定義 1.16. 空でない V の有限部分集合 Φ が次を満たすとき, Φ を **root system** という:

- (i) Φ は V を生成する,
- (ii) $\forall \alpha \in \Phi, \mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$,
- (iii) $\forall \alpha, \beta \in \Phi, s_\beta(\alpha) \in \Phi$.

また, Φ の元を **root vector**, または単に **root** という.

定義 1.17. root system Φ が次を満たすとき, **crystallographic** であるという:

$$(iv) \forall \alpha, \beta \in \Phi, 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}.$$

finite reflection group が与えられると、それに対応する root system が存在する：

命題 1.18. W を essential finite reflection group とする。このとき、 $\Phi := \{\alpha \in V \mid \|\alpha\| = 1, s_\alpha \in W\}$ は root system である。

証明. (i) を示すために、 $\text{Fix}(W) = \bigcap_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$ を示す：

($\subseteq$) 任意に $\lambda \in \text{Fix}(W)$, $\alpha \in \Phi$ をとると、 $s_\alpha \in W$ であるから $s_\alpha(\lambda) = \lambda$ である。よって、

$$\langle \alpha, \lambda \rangle = \langle \alpha, s_\alpha(\lambda) \rangle = \langle s_\alpha^{-1}(\alpha), \lambda \rangle = \langle s_\alpha(\alpha), \lambda \rangle = \langle -\alpha, \lambda \rangle = -\langle \alpha, \lambda \rangle. \quad \therefore \langle \alpha, \lambda \rangle = 0.$$

したがって、 $\lambda \in H_\alpha$ である。

($\supseteq$) $\lambda \in \bigcap_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$ とする。任意に $w \in W$ をとり、 $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ と reflections の積で書く。ただし、 $\|\alpha_1\| = \cdots = \|\alpha_r\| = 1$ としておく。すると、 $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \Phi$ であるから、 $\lambda \in H_{\alpha_i}$ である。よって、

$$w(\lambda) = (s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{r-1}} s_{\alpha_r})(\lambda) = (s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{r-1}})(\lambda) = \cdots = \lambda.$$

よって、 W は essential だから、

$$\{0\} = \text{Fix}(W) = \bigcap_{\alpha \in \Phi} H_\alpha.$$

したがって、

$$V = \text{Fix}(W)^\perp = \left(\bigcap_{\alpha \in \Phi} H_\alpha \right)^\perp = \sum_{\alpha \in \Phi} H_\alpha^\perp = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R}\alpha$$

であるから Φ は V を生成する。

(ii) は $\|\alpha\| = 1$ からわかる。

(iii) を示す。 $\forall \alpha, \beta \in \Phi$ に対し、 $\|s_\beta(\alpha)\| = \|\alpha\| = 1$ である。また、補題 ?? より、 $s_{s_\beta(\alpha)} = s_\beta s_\alpha s_\beta^{-1} \in W$ である。よって、 $s_\beta(\alpha) \in \Phi$ が成り立つ。 ■

逆に、root system が与えられると、それに対応する finite reflection group が存在する：

命題 1.19. $\Phi \subseteq V$ を root system とする。このとき、 $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ が生成する群 W_Φ は essential finite reflection group である。

証明. 命題 1.18 の証明中 (i) で、 $\Phi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ とし、 W を W_Φ と読み替えれば $\text{Fix}(W_\Phi) = \bigcap_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$ が成り立つ。よって、 Φ は V を生成するから $\text{Fix}(W_\Phi)^\perp = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R}\alpha = V$ である。したがって、 W_Φ は essential である。

あとは W_Φ が有限であることを示せば良い。(iii) より、 $\forall \alpha \in \Phi, s_\alpha(\Phi) = \Phi$ であるから $\forall w \in W, w(\Phi) = \Phi$ である。すなわち、 w は Φ 上の置換とみなせる。よって、

$$\begin{array}{ccc} p: W_\Phi & \longrightarrow & \text{Perm}(\Phi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ w & \longmapsto & (\alpha \mapsto w(\alpha)) \end{array}$$

と定めると、これは group hom である ($\text{Perm}(\Phi)$ は Φ の置換群)。これが単射であることを示せば、 $|W_\Phi| \leq$

$|\text{Perm}(\Phi)| < \infty$ が示せる.

$$\begin{aligned} w \in \text{Ker } p &\iff \forall \alpha \in \Phi, w(\alpha) = \alpha \\ &\iff w = 1 \end{aligned}$$

であるから, $\text{Ker } p = \{1\}$ であり, 単射であることが示せた. ■

root system は finite reflection group の生成系を与えているが, 群の生成元の個数はできるだけ少なくしたい. そこで, root system を “うまく” 取る方法を考える.

定義 1.20. $\Phi \subseteq V$ を root system とし, $p \in V \setminus \{0\}$ は $\forall \alpha \in \Phi, \langle \alpha, p \rangle \neq 0$ を満たすとする. このとき, $\Pi := \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, p \rangle > 0\}$ を **positive root system** という.

注意 1.21. Π は p の取り方による.

定義 1.22. Π を positive root system とする. $\Delta \subseteq \Pi$ が次を満たすとき, Δ を **simple root system** という:

- (i) Δ は V の基底,
- (ii) $\forall \alpha \in \Pi, \exists c_\beta \geq 0$ s.t. $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} c_\beta \beta$.

simple root system は必ず存在し, しかも一意である:

事実 1.23. Φ を root system, Π を positive root system とする.

- (1) $\exists! \Delta \subseteq \Phi$: simple root system,
- (2) W_Φ は $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ で生成される.

以下, essential finite reflection group W に対し, その root system を Φ , その simple root system を Δ とする. また, $\alpha, \beta \in \Delta$ に対し, $m(\alpha, \beta)$ を $s_\alpha s_\beta$ の位数, $c(\beta, \alpha) = 2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ とする.

注意 1.24. $s_\alpha^2 = 1$ より $m(\alpha, \alpha) = 1$ である. また, $s_\beta s_\alpha = (s_\alpha s_\beta)^{-1}$ より $m(\alpha, \beta) = m(\beta, \alpha)$ である.

補題 1.25. $\alpha \neq \beta \in \Delta$ とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = -\|\alpha\| \|\beta\| \cos \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}.$$

命題 1.26. α と β は線型独立とする. Φ が crystallographic なとき, $m(\alpha, \beta) = 2, 3, 4, 6$ である.

証明. 補題 1.25 より,

$$c(\beta, \alpha) = 2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2 \frac{-\|\alpha\| \|\beta\| \cos \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}}{\|\alpha\|^2} = -2 \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}$$

であるから,

$$c(\alpha, \beta)c(\beta, \alpha) = \left(-2 \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|} \cos \frac{\pi}{m(\beta, \alpha)}\right) \left(-2 \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}\right) = 4 \cos^2 \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}$$

である. Φ は crystallographic, すなわち $c(\alpha, \beta), c(\beta, \alpha) \in \mathbb{Z}$ であるから, $c(\alpha, \beta)c(\beta, \alpha) = 0, 1, 2, 3, 4$ である.

$c(\alpha, \beta)c(\beta, \alpha) = 4$ のとき, $m(\alpha, \beta) = 1$ となるが, これは α と β の線型独立性に矛盾する.

$c(\alpha, \beta)c(\beta, \alpha) = 0, 1, 2, 3$ のとき, それぞれ次のようになる: ■

表1 $c(\alpha, \beta)c(\beta, \alpha)$ と $m(\alpha, \beta)$ の関係

$c(\alpha, \beta)c(\beta, \alpha)$	$\cos^2 \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}$	$\cos \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}$	$m(\alpha, \beta)$
0	0	0	2
1	1/4	1/2	3
2	1/2	$1/\sqrt{2}$	4
3	3/4	$\sqrt{3}/2$	6

定義 1.27. $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ とする. このとき, r 次正方行列 $C := (c(\alpha_i, \alpha_j))$ を Φ の **Cartan matrix** という.

定義 1.28. $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ とする. このとき, Φ の **Coxeter diagram** を次のように定義する:

- (i) r 個の頂点を持つ,
- (ii) 頂点 i と頂点 j は $m(\alpha_i, \alpha_j)$ と書かれた辺で結ぶ,
- (iii) 特に, $m(\alpha_i, \alpha_j) = 2, 3, 4, 6$ のときは, (ii)の代わりに表 1 で対応する $c(\alpha_i, \alpha_j)c(\alpha_j, \alpha_i)$ 本の辺で結ぶ.

定義 1.29. Coxeter diagram に次の条件を追加したものを **Coxeter-Dynkin diagram** という:

- (iv) $|c(\alpha_i, \alpha_j)| < |c(\alpha_j, \alpha_i)|$ のとき, 頂点 i から頂点 j に向きをつける.

定義 1.30. root system Φ で生成される lattice, すなわち次の集合 Λ を **root lattice** という:

$$\Lambda := \left\{ \sum_{i=1}^r s_i \alpha_i \mid \alpha_i \in \Phi, s_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2 E_8 lattice

定義 2.1. E_8 格子とは, integralLattice であって, even unimodular かつランクが 8 であるもののことである.

定理 2.2. 2 つの E_8 格子 Λ_1, Λ_2 は同型である.

証明. sorry. ■

定義 2.3. E_8 の Cartan 行列を M_0 , それを 1 行ずつ行基本変形していき (その過程の行列を $M_1, M_2, \dots, M_6$

とする) 上三角にしたものを M_7 とする：

$$M_0 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M_7 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

補題 2.4. M_7 は上三角である.

証明. 略. ■

補題 2.5. $\det M_7 = 1$ である.

証明. 補題 2.4より, M_7 の行列式は対角成分たちの積であるから

$$\det M_7 = 2 \cdot 2 \cdot (3/2) \cdot (5/6) \cdot (4/5) \cdot (3/4) \cdot (2/3) \cdot (1/2) = 1.$$

定理 2.6. E_8 の Cartan 行列の行列式は 1 である.

証明. 補題 2.5より

$$(\text{求める行列式}) = \det M_0 = \det M_1 = \cdots = \det M_7 = 1.$$

定義 2.7. B を E_8 の Cartan 行列 $C(= M_0) \in M_8(\mathbb{Z})$ から定まる双線型形式とする：

$$B(x, y) := {}^t x C y = \langle x, C y \rangle \quad (\forall x, y \in \mathbb{Z}^8).$$

補題 2.8. 任意の $x \in \mathbb{Z}^8$ に対し, 次が成り立つ：

$$B(x, x) = 2(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 \\ - (x_0 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5 + x_5 x_6 + x_6 x_7))$$

証明. 内積の形にして, あとは具体的に計算：

$$B(x, x) = \langle x, C x \rangle = (\text{右辺}).$$

補題 2.9. 任意の $x \in \mathbb{Z}^8$ に対し、平方完成すると次のようになる：

$$\begin{aligned} B(x, x) = & \left(\sqrt{2}x_0 - \sqrt{\frac{1}{2}}x_2 \right)^2 + \left(\sqrt{2}x_1 - \sqrt{\frac{1}{2}}x_3 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}x_3 \right)^2 \\ & + \left(\sqrt{\frac{5}{6}}x_3 - \sqrt{\frac{6}{5}}x_4 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4}{5}}x_4 - \sqrt{\frac{5}{4}}x_5 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}x_5 - \sqrt{\frac{4}{3}}x_6 \right)^2 \\ & + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}x_6 - \sqrt{\frac{3}{2}}x_7 \right)^2 + \frac{1}{2}x_7^2 \end{aligned}$$

証明. 左辺に補題 2.8 を代入して計算すれば得られる。 ■

定理 2.10. $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}^8, B(x + y, z) = B(x, z) + B(y, z)$.

証明. 計算するだけ。 ■

定理 2.11. $\forall x, y \in \mathbb{Z}^8, B(x, y) = B(y, x)$.

証明. 計算するだけ。 ■

定理 2.12. $\forall x \in \mathbb{Z}^8, B(x, x) \geq 0$.

証明. 補題 2.9 より、 $B(x, x)$ は平方の和で表せるから成り立つ。 ■

定理 2.13. $\forall x \in \mathbb{Z}^8, B(x, x) = 0 \implies x = 0$.

証明. 補題 2.9 より、 $B(x, x)$ は平方の和で表せ、 $= 0$ とすると各項が 0 である。よって、最後の項に注目すると、 $x_7 = 0$ である。したがって、最後から 2 番目の項に注目すると、 $x_6 = 0$ である。これを繰り返すと、 $x_0 = \dots = x_7 = 0$ を得る。 ■

定理 2.14. $\forall x \in \mathbb{Z}^8, 2 \mid \langle x, x \rangle_{\mathbb{Z}}$.

証明. 補題 2.8 より従う。 ■

定理 2.15. E_8 格子は unimodular である。

証明. sorry. ■

定理 2.16. E_8 格子は存在する。

証明. sorry. ■

定理 2.17. E_8 格子 Λ に対し、 $\forall n \in \mathbb{N}, \# \{x \in \Lambda \mid B(x, x) = n\} < \infty$.

証明. sorry. ■

補題 2.18. E_8 格子 Λ に対し、 $\# \{x \in \Lambda \mid B(x, x) = 2\} = 240$.

証明. sorry. ■