

My formalization project

Noboru Nawashiro

2025 年 6 月 24 日

1 section1

Definition 1. E_8 格子とは, `integralLattice` であって, even unimodular かつランクが 8 であるもののことである.

Theorem 2. 2 つの E_8 格子 Λ_1, Λ_2 は同型である.

Proof. sorry. □

Definition 3. E_8 の Cartan 行列を M_0 , それを 1 行ずつ行基本変形していき (その過程の行列を $M_1, M_2, \dots, M_6$ とする) 上三角にしたものを M_7 とする:

$$M_0 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$M_7 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Lemma 4. M_7 は上三角である.

Proof. 略. □

Lemma 5. $\det M_7 = 1$ である.

Proof. 補題 4 より, M_7 の行列式は対角成分たちの積であるから

$$\det M_7 = 2 \cdot 2 \cdot (3/2) \cdot (5/6) \cdot (4/5) \cdot (3/4) \cdot (2/3) \cdot (1/2) = 1.$$

□

Theorem 6. E_8 の Cartan 行列の行列式は 1 である.

Proof. 補題 5 より

$$(\text{求める行列式}) = \det M_0 = \det M_1 = \cdots = \det M_7 = 1.$$

□

Definition 7. B を E_8 の Cartan 行列 $C(= M_0) \in M_8(\mathbb{Z})$ から定まる双線型形式とする：

$$B(x, y) := {}^t x C y = \langle x, C y \rangle \quad (\forall x, y \in \mathbb{Z}^8).$$

Lemma 8. 任意の $x \in \mathbb{Z}^8$ に対し、次が成り立つ：

$$\begin{aligned} B(x, x) = & 2(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 \\ & - (x_0 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5 + x_5 x_6 + x_6 x_7)) \end{aligned}$$

Proof. 内積の形にして、あとは具体的に計算：

$$B(x, x) = \langle x, C x \rangle = (\text{右辺}).$$

□

Lemma 9. 任意の $x \in \mathbb{Z}^8$ に対し、平方完成すると次のようになる：

$$\begin{aligned} B(x, x) = & \left(\sqrt{2} x_0 - \sqrt{\frac{1}{2}} x_2 \right)^2 + \left(\sqrt{2} x_1 - \sqrt{\frac{1}{2}} x_3 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} x_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} x_3 \right)^2 \\ & + \left(\sqrt{\frac{5}{6}} x_3 - \sqrt{\frac{6}{5}} x_4 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4}{5}} x_4 - \sqrt{\frac{5}{4}} x_5 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}} x_5 - \sqrt{\frac{4}{3}} x_6 \right)^2 \\ & + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} x_6 - \sqrt{\frac{3}{2}} x_7 \right)^2 + \frac{1}{2} x_7^2 \end{aligned}$$

Proof. 左辺に補題 8 を代入して計算すれば得られる.

□

Theorem 10. $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}^8, B(x + y, z) = B(x, z) + B(y, z).$

Proof. 計算するだけ.

□

Theorem 11. $\forall x, y \in \mathbb{Z}^8, B(x, y) = B(y, x).$

Proof. 計算するだけ.

□

Theorem 12. $\forall x \in \mathbb{Z}^8, B(x, x) \geq 0.$

Proof. 補題 9 より、 $B(x, x)$ は平方の和で表せるから成り立つ.

□

Theorem 13. $\forall x \in \mathbb{Z}^8, B(x, x) = 0 \implies x = 0.$

Proof. 補題 9 より、 $B(x, x)$ は平方の和で表せ、 $= 0$ とすると各項が 0 である。よって、最後の項に注目すると、 $x_7 = 0$ である。したがって、最後から 2 番目の項に注目すると、 $x_6 = 0$ である。これを繰り返すと、 $x_0 = \cdots = x_7 = 0$ を得る.

□

Theorem 14. $\forall x \in \mathbb{Z}^8, 2 \mid \langle x, x \rangle_{\mathbb{Z}}$.

Proof. 補題 8より従う.

□

Theorem 15. E_8 格子は unimodular である.

Proof. sorry.

□

Theorem 16. E_8 格子は存在する.

Proof. sorry.

□

Theorem 17. E_8 格子 Λ に対し, $\forall n \in \mathbb{N}, \#\{x \in \Lambda \mid B(x, x) = n\} < \infty$.

Proof. sorry.

□

Lemma 18. E_8 格子 Λ に対し, $\#\{x \in \Lambda \mid B(x, x) = 2\} = 240$.

Proof. sorry.

□